$\forall x, y \in E: x \neq y$:

T_0: για κάποιο από τα x, y, έστω το x, $\exists U$ περιοχή του x τ.ω. $y \notin U$

T_1: $\exists U, V \in \mathcal{T}: x \in U, y \notin U \wedge y \in V, x \notin V$ (Τα μονοσύνολα είναι κλειστά)

$T_1 \Leftrightarrow \{x\}$ κλειστά $\forall x \in E$

T_2: $\exists U, V \in \mathcal{T}: x \in U, y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$ (Hausdorff)

$T_2 \Leftrightarrow$ κάθε δίκτυο στον $(E, \mathcal{T})$ συγκλίνει το πολύ σε ένα στοιχείο του E

Πρόταση

$(E, \mathcal{T})$ $1^{ης}$ αριθμ. και οι ακολ. συγκλίνουν το πολύ σε ένα σημείο, τότε $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2

Πρόταση

ΤΑΕΙ: α) $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2

β) $\forall x, y \in E$ με $x \neq y$, $\exists U \in \mathcal{U}_x : y \notin \overline{U}$

(Αν ισχύει για όλα τα ζευγάρια, τότε $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2)

γ) $\bigcap \{\overline{U} \in \mathcal{U}_x\} = \{x\}$ $\forall x \in E$

Απόδειξη

α) $\Rightarrow$ β) Έστω ότι ο $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2 και $x, y \in E$, $x \neq y$, τότε $\exists U, V \in \mathcal{T}: x \in U, y \in V$ κ' $U \cap V = \emptyset$. Παρατηρώ ότι το V^c είναι κλειστό με $U \subseteq V^c$. Άρα θα είναι και $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{V^c} = V^c$ με $y \in V \Rightarrow y \notin V^c \Rightarrow y \notin \overline{U}$

$x \neq y: r = d(x, y) > 0$

$B(x, r/3) \cap B(y, r/3) = \emptyset$

Άρα οι μετρικοί χώροι είναι χώροι Hausdorff

γ) => α) Έστω ότι $\{a\} = \cap\{\overline{U} \in \mathcal{U}_a\}$ $\forall a \in E$. Ας είναι $x, y \in E$ με $x \neq y$. Τότε $y \notin \{x\} = \cap\{\overline{U} \in \mathcal{U}_x\}$.
Επομένως $\exists\, \overline{U_0} \in \mathcal{U}_x : y \notin \overline{U_0} \in \mathcal{U}_x$. Επειδή, $\exists U \in \mathcal{T}$ με
$x \in U$, $y \notin U \subseteq \overline{U_0}$. Άρα $y \in (\overline{U_0})^c = V \in \mathcal{T}$ και $U \cap V = \emptyset$

Ορισμός

T_3 { (ομαλός χώρος) $\forall x \in E$, $\forall K$ κλειστό, $x \notin K \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T} : K \subseteq V$ κ' $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$
T_1

(Διαχωρίζει τα σημεία με τα σύνολα)

Παρατήρηση

- Αν έχω μόνο τον ομαλό χώρο $T_3 \not\Rightarrow T_2$
- Αν έχω όλους κ' τον ομαλό χώρο κ' το T_1 $T_3 \Rightarrow T_2$

Παράδειγμα

$E = \{a, b, c\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$

κλειστά $\emptyset$, E, $\{b, c\}$, $\{a\}$ είναι κ' ανοιχτά

Θ.δ.ο. ο $(E, \mathcal{T})$ είναι ομαλός
$\kappa = \{b, c\}$ δεν έχει το $\{a\}$
$x : \{a\}$
Έχω να βρω ανοιχτά σύνολα, υπερσύνολα των παραπάνω.
Αυτά τα σύνολα είναι τα ίδια τα σύνολα. Άρα ομαλός.
Δεν είναι T_2 καθώς: $\{b, c\}$ δεν μπορώ να βρω ανοιχτά σύνολα τ.ω. το ένα να περιέχει το b κ' το άλλο το c και η τομή τους να είναι $\emptyset$. Τα μόνα ανοιχτά είναι E, $\{b, c\}$ που τα περιέχουν.

Πρόταση

Αν ο $(E, \mathcal{T})$ είναι T_3 τότε είναι και T_1

Απόδειξη (Συμπλήρωση)

Αν πάρω $x, y \in E$, $x \neq y$.

x ανοιχτό, $x \in U \in \mathcal{T}$

κ' $\{y\}$ κλειστό, $\{y\} \in V$.

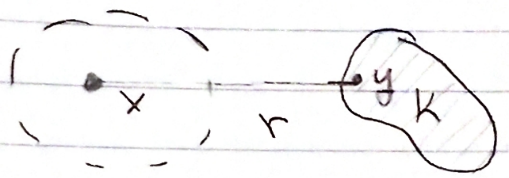
Άρα βρήκα μια περιοχή U που να περιέχει μόνο το x κ' μια περιοχή V που να περιέχει μόνο το $\{y\}$ κ' $U \cap V = \emptyset$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι μετρικοί χώροι (E, d) είναι T_3.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας είναι (E, d) μ.χ., $x \in E$, K: κλειστό με $x \notin K$.



$x \in B(x, r/3) = U$.

$K \subseteq V = \bigcup_{y \in K} B(y, r/3)$ (είναι ανοιχτό, καθώς είναι ένωση ανοιχ. συνόλων)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } \exists z \in V \cap U \neq \emptyset,\ z \in B(y_0, r/3) \Rightarrow d(y_0, z) < r/3 \\ \text{κ' } z \in B(x, r/3) \Rightarrow d(x, z) < r/3 \end{array}\right\} \Rightarrow d(x, y_0) < 2r/3 < r$$

Άτοπο.

$x \in K^c \Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq K^c$

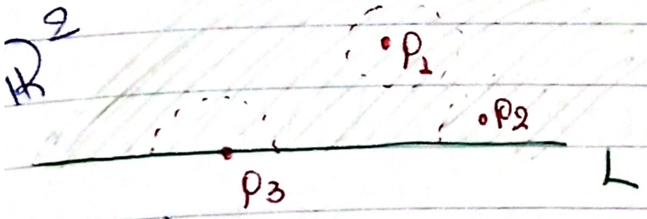
τότε $d(x, y) > r/2$ $\forall y \in K$ (Αν είναι $< r/2$ θα βρω ένα στοιχείο του K στην $B(x, r)$ Άτοπο).

κ' $\inf_{y \in K} d(x, y) > r/2 > 0$

Οι μετρικοί χώροι είναι κ' T_1 συνεπώς, είναι κ' T_3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ σελ. 292.

Ένας χώρος που είναι T_2 αλλά όχι T_3.

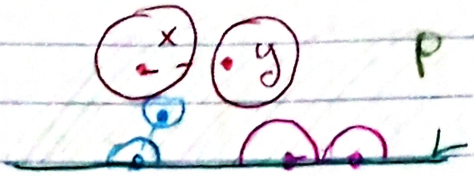


P $\quad X = P \cup L$

P_1: ολόκληρη μέσα στο επίπεδο (πλην) P

p_2: Ο πλήδισκος τομή με το p χωρίς τα σημεία που έχει η L
p_3: Ίδιο με το p_2 συν το σημείο p_3

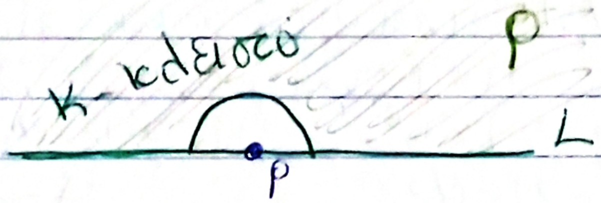
$$U_r(p) = \begin{cases} B(p,r)\cap P, & p\in P \\ \{B(p,r)\cap P\}\cup p, & p\in L \end{cases} \quad r>0$$



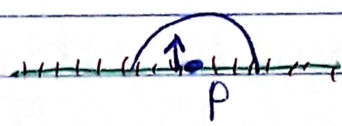
Επομένως, γενικά ο χώρος είναι T_2 καθώς οι πλήδισκοι διαχωρίζουν τα σημεία.

Για να μην είναι T_3 θέλω να πάρω ένα σημείο κ' ένα κλειστό σύνολο τ.ω. να μην διαχωρίζονται.

α)



β)



$K = L \setminus \{(p,0)\}$.

Γιατί δεν μπορώ να τα διαχωρίσω:
Όσο μικρή ακτίνα και να πάρω στο β) θα έχω ε και προς τα πάνω. Επομένως, σίγουρα θα τέμνει τη μπάλα γύρω από το p. Άρα ο χώρος μας δεν είναι ομαλός.

Ορισμός

$$T_4 \begin{cases} \text{κανονικός: } \forall K,F \text{ κλειστά},\ K\cap F=\emptyset \Rightarrow \exists U,V\in\tau: K\subseteq U,\ F\subseteq V,\ U\cap V=\emptyset \\ T_1 \end{cases}$$

(διαχωρίζει κλειστά σύνολα).

$T_4 \Rightarrow T_3$ (όπως πριν χωρίς το T_1: $T_4 \not\Rightarrow T_3$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κανονικός χώρος $\not\Rightarrow T_4$

$E=\{a,b,c\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

κλειστά σύνολα: $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{c\}$, $\emptyset$, E

Δεν μπορώ να τα πάρω, καθώς δεν είναι ξένα μεταξύ τους

Ομοίως τα υπόλοιπα ζεύγαρα $\{b,c\}$ κ' $\{c\}$
$\{a,c\}$ κ' $\{c\}$
$\{b,c\}$ κ' E
$\{a,c\}$ κ' E
$\{c\}$ κ' E

Άρα $\nexists$ κλειστά τ.ω. να είναι ξένα μεταξύ τους

Άρα ο $(E, \mathcal{T})$ όχι T_4.

Τα μόνα κλειστά σύνολα που είναι ξένα μεταξύ τους είναι το $\emptyset$ με E, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{c\}$ με κενή τομή.

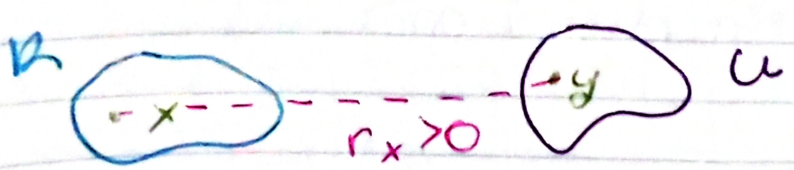
ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι μετρικοί χώροι (E,d) είναι T_4

Απόδειξη

~~Έστω~~ Ότι ο (E,d) είναι T_2 είναι γνωστό

Για K, F κλειστά έχουμε



$K \subseteq V = \bigcup B(x, r_x/3)$
$\in \mathcal{T}$ ανοιχτό

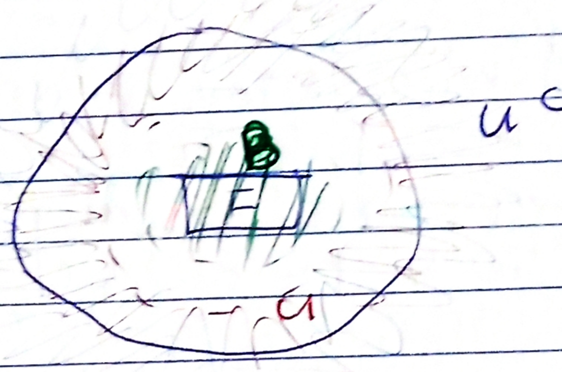
Καμία από τις $B(x, r_x/3)$ δεν τέμνει το F.

Θα πάρω τα στοιχεία του F και θα κάνω το ίδιο.
Θα πρέπει ν.δ.ο. $U \cap V = \emptyset$.
Με εις άτοπο απαγωγή $z \in U \cap V$. Τότε θα $\exists$ ένα σημείο
στον K που θα έχει απόσταση $r + \frac{1}{n} = \varepsilon$. Το ίδιο για το F
Δηλ. $d(z,x) = r_x/3 + \varepsilon$ κ' $d(z,y) = r_y/3 + \varepsilon$

Με τριγων. $d(x,y) = \frac{2r}{3} + \frac{2}{n} < r$ Άτοπο

ΠΡΟΤΑΣΗ
(E,τ) κανονικός αν-ν $\forall F$ κλειστό κ' $U \in \tau$ με $F \subseteq U \Rightarrow$
$\exists V \in \tau : F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
$(\Rightarrow)$ $F \subseteq U$ ανοιχτό
$F \cap U^c = \emptyset$ (κλειστό U^c)
$U^c \subseteq A \in \tau$
$F \subseteq B \in \tau$
A^c κλειστό
$\left.\begin{array}{l} B \subseteq A^c \\ \bar{B} \subseteq \bar{A}^c = A^c \end{array}\right\} \Rightarrow V = B$



ΠΡΟΤΑΣΗ
T_1 έως T_4 είναι τοπολογικές ιδιότητες
T_4 όχι κληρονομική. $\exists$ αντιπαράδειγμα που ο (E,τ) είναι κανονικός, αλλά για κάποιο υποσύνολό του δεν είναι.
Αλλά T_4 κληρονομείται στα κλειστά

ΠΡΟΤΑΣΗ
$f : (E_1,\tau_1) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (E_2,\tau_2)$

α) Εάν (E_1,τ_1) είναι T_1 κ' f ανοιχτή $\Rightarrow (E_2,\tau_2)$ είναι T_1
β) —»— T_2 —»— T_2

γ) (E_1, τ_1) T_3, T_4 ομοίως (E_2, τ_2) $T_3 T_4$

Αποδειξη

β) $x, y \in (E_2, \tau_2)$ $x \neq y$

$a = f^{-1}(x)$ $\in E_1$ (Αφου f 1-1 κ' επι), $a \neq b$

$b = f^{-1}(y)$

$\exists u, v \in \tau_1$ με $a \in u$ κ' $b \in V$ κ' $u \cap v = \emptyset$ =>

$x \in f(v) \in \tau_2$, γιατι f ανοιχτη, μεταφερει ανοιχτα συνολα

κ' $y \in f(u) \in \tau_2$ σε ανοιχτα συνολα

Δεν γινεται να εχουν κοινο σημειο καθως f 1-1

Αρα εχω βρει 2 ανοιχτα που διαχωριζουν τα x κ' y

Αφου (E_2, τ_2) ειναι T_2 ειναι και T_1

ΠΡΟΤΑΣΗ

(E, τ) κανονικος S κλειστο (E, τ) => (S, τ_S) κανονικος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$\tau_S = \{S \cap V, u \in \tau\}$ $A \subseteq S$ κλειστο στο τ_S <=> $\exists k$ κλειστο $A = S \cap K$

Αποδειξη Προτ

Με την παρατηρηση ειναι πιο ευκολη

$F_1 \; F_2 - F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$F_1 = S \cap k_1$

$F_2 = S \cap k_2$

k_1, k_2 ειναι κλειστα

Τα διαχωριζουσ ον κανονικο μου χωρο με ανοιχτα

κ' k_1 $u \cap S \in \tau_S$ θα ειναι ανοιχτα στη σχετικη τοπολογια

k_2 $v \cap S \in \tau_S$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(E, τ) ειναι T_2 <=> $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ κλειστο στον E^2

(προφανως με την τοπολ γινομ. ή την box)

Πρόταση

$f, g : (E_1, \tau_1) \xrightarrow{\text{συν}} (E_2, \tau_2)$ ε' (E_2, τ_2) είναι T_2

α) $C = \{x \in E_1 : f(x) = g(x)\}$ κλειστό $\subseteq E_1$

β) $D \subseteq E_1$ πυκνό $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$

γ) G_f (γράφημα της f) κλειστό στον $E_1 \times E_2$

δ) $f \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (E_1, \tau_1)$ είναι T_2

Απόδειξη α)

$F : E_1 \to E_1 \times E_2$

$x \to (f(x), g(x))$ είναι συνεχής καθώς f, g συνεχείς, άρα και οι προβολές συνεχείς.

Η Δ είναι κλειστή, άρα $F^{-1}(\Delta)$ κλειστό